Полтинникова Мария Сергеевна
Социологический институт РАН
Российская Федерация, Санкт-Петербург
maria.poltinnikova@gmail.com

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ В СОЦИОЛОГИИ

Аннотация. В статье обсуждаются подходы к моделированию и изучению динамики сложных процессов, рассматриваются возможности моделирования социальных процессов с помощью современных методов дифференциальной динамики. В качестве примера изучается дискретная модель конкурирующих групп.
Ключевые слова: математическое моделирование; неминейные модели; притягивающее множество динамической системы; модели Лотка-Вальтерра

Poltinnikova Maria
Sociological Institute of Russian Academy of Sciences
Russian Federation, Saint-Petersburg
maria.poltinnikova@gmail.com

ON MATHEMATICAL MODELING IN SOCIOLOGY

Abstract. The article is deals with approaches to modeling and study of dynamics of complicated processes. We are discussed possibilities of modeling social processes by means of modern methods of differential dynamics. As an example, we are considered the discrete model of competing groups.
Key words: mathematical modeling; nonlinear models; attractor; Lotka-Volterra model

Подходы к моделированию и изучению динамики процессов

Изучение динамики некоторого процесса предполагает, что исследователь знает дифференциальное уравнение (систему дифференциальных уравнений), описывающее этот процесс, и пытается аналитически или численно решить задачу Коши, то есть найти функцию (набор функций), удовлетворяющих некоторым, наперёд заданным начальным данным. Такой подход был известен со времени Ньютона и привёл к бурному развитию разнообразных физических приложений. Этот подход обосновывался теоремой о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных и параметров [Арнольд, 2000, с. 271].

Потом обнаружилось, что принципиальная невозможность точного задания начальных данных и параметров системы может привести к тому, что два близких начальных состояния системы дифференциальных уравнений могут приводить к решениям, поведение которых качественно различно. Такое поведение было свойственно даже простым нелинейным уравнениям. Аналогично при малом изменении параметров системы решение с заданными начальными данными может качественно измениться. Первым на эти эффекты обратил внимание Пуанкаре, изучая задачу трёх тел. Он же предложил изучать поведение системы на качественном уровне.

В рамках этого подхода необходимо сначала исследовать, как небольшие изменения начальных данных и параметров влияют на поведение решений [Андронов, Витт, Хайкин, 1959, с. 410], а потом численно решать задачу Коши.

В качестве примера того, как небольшие изменения параметров могут влиять на решение может служить уравнение нормального размножения с учётом конкуренции [Арнольд, 2000 с. 18].

Оно описывается дифференциальным уравнением, которое называется логистическим: dx/dt=(r-a*x)*x. Обозначим дробь r/a буквой K. Легко увидеть, что если x(t)=K, то dx/dt=0, то есть x(t)=K — стационарное решение логистического уравнения.

Это уравнение можно проинтегрировать и получить три качественно разных решения: стационарное и два семейства решений:

1. x(t)=c*K/(exp(-r*t)+c) при x(t)<K
2. x(t)=c*K/(-exp(-r*t)+c) при x(t)>K,

где c — параметр, зависящий от начальных данных t0, x(t0).

Если x(t0) близко к K, то в силу неточности начальных данных мы не можем сказать к какому из приведённых семейств принадлежит решение. Тем не менее мы можем предсказать поведение решения, поскольку оба семейства ассимптотически приближаются к стационарному.

С другой стороны, если рассмотреть уравнение нормального размножения с учётом конкуренции и отлова [Арнольд, 2000, с. 21]: dx/dt=(r-a*x)*x-c, которое изменением масштаба по переменным x и t обычно приводят к виду dx/dt=(1-x)*x-d (d=c*K*r), мы получим семейства решений, асимптотика которых не столь предсказуема.

В этом уравнении небольшие изменения параметра d вблизи критического значения 1/4 при одних и тех же начальных данных могут приводить к совершенно разным решениям: исчезновение популяции с течением времени или стабилизация её численности. Поскольку этот параметр вычисляется на основе экспериментальных данных, которые не могут быть точными, интервал вокруг числа d может содержать число 1/4. Следовательно, без оценки точности числа d, мы не можем узнать, какие решения имеет уравнение. В рассмотренном примере знание решения для задачи Коши оказывается бесполезным.

Приведённые примеры показывают, что для исследования динамики сложных процессов важно не умение решать задачу Коши, а знание асимптотического поведения разных семейств решений. А именно, если мы в качестве начального условия возьмём шарик, содержащий начальную точку, и будем следить за его движением и деформацией во времени, то какое множество получится в пределе?

Этот подход привёл к тому, что специалисты по качественной теории дифференциальных уравнений стали изучать разнообразные притягивающие множества систем или аттракторы.

Изучение эволюционных уравнений (систем уравнений) выделилось в отдельную область динамических систем и само понятие динамической системы расширилось. Так наряду с системами с непрерывным временем, стали изучаться системы с дискретным временем. Модели с дискретным временем даже на плоскости обнаружили очень сложное поведение и структуру притягивающих множеств [Каток, Хасселблат, 1999, с. 61].

Для примера рассмотрим модель Лотка-Вольтерра [Вольтерра, 1976], в которой изучаются две взаимодействующие популяции. Пусть численность первой - x(t), а второй - y(t). Числа a1 и a2 задают коэффициенты скорости свободного размножения. Внутривидовая конкуренция изменяет численность пропорционально количеству пар каждого вида с коэффициентами пропорциональности b1 и b2. Взаимодействие популяций пропорционально количеству пар (x(t), y(t)) с коэффициентами пропорциональности c1 для изменения численности x(t) и c2 для изменения численности y(t). Тогда пара уравнений

dx/dt=(a1+b1*x)*x +c1*x*y; dy/dt=(a2+b2*y) *y+c2*x*y

задаёт нелинейную динамическую систему. Её фазовое пространство K - это угол в плоскости (x,y), в котором x(t) и y(t) не отрицательны. Сверху значения x(t) и y(t) тоже ограничены некоторым числом, которое характеризует максимум ресурсов. Предполагается, что a1>0 и a2>0.

Экологи, которые активно используют модели Лотка-Вольтерра, отмечают, что они не всегда согласуются с экспериментами. Реальная жизнь оказывается намного сложнее. Однако известно, что похожие уравнения для дискретной динамической системы описывают очень сложные изменения. При ненулевых значениях параметров b1 и b2 такие системы заменой переменных сводятся к системе Эно [Мун, 1990, с. 37]:

x(n+1)=a+b*y(n)-x(n)^2; y(n+1)=x(n),

динамика которой может демонстрировать хаотическое поведение [Леонов, 2001]. При нулевых значениях этих параметров система Лотка-Вольтерра описывает динамику взаимодействия конкурирующих групп [Вольтерра, 1976].

Дискретная модель Лотка-Вольтерра

Рассмотрим пример аналогичный моделям Лотка-Вольтерра, задающий динамическую систему с дискретным временем. Пусть x(n) и y(n) - численности двух конкурирующих групп. Предположим, что прирост численности x(n+1)-x(n) пропорционален x(n) и прирост численности y(n+1)-y(n) пропорционален y(n). Кроме того, попробуем учесть некоторую нелинейность. Пусть прирост численности изменяется пропорционально количеству пар из этих групп с коэффициентами пропорциональности c1 и c2 соответственно. Заметим, что прирост может быть отрицательным. Тогда получим динамическую систему дискретного времени на множестве K, описанном выше:

x(n+1)=(1+a1)*x(n)+c1*x(n)*y(n);

y(n+1)=(1+a2)*y(n)+c2*x(n)*y(n).

Первым шагом в изучении притягивающих множеств системы считается нахождение её стационарных решений x(n)=const; y(n)=const, то есть решения системы уравнений:

x=(1+a1)*x+c1*x*y; y=(1+a2)*y+c2*x*y.

Они имеют координаты P1(0,0) и P2((1-a2)/b2,(1-a1)/b1). Численность группы не может быть отрицательной, поэтому (1-a2)/b2>0 и (1-a1)/b1>0. Это возможно в одном из четырёх случаев:

1. 0<a1<1, 0<a2<1, b1>0, b2>0;
2. a1>1, 0<a2<1, b1<0, b2>0;
3. 0<a1<1, a2>1, b1>0, b2<0;
4. a1>1, a2>1, b1<0, b2<0.

Мы будем рассматривать эту систему с учётом симметрии относительно прямой y=x.

Второй шаг в изучении притягивающих множеств системы - это изучение линейного приближения правой части системы в окрестности особых (стационарных) решений. Для этого вычисляют матрицу частных производных J(x,y):

a1+b1*y	b1*x
b2*y	a2+b2*x

В точках P1 и P2 соответственно получим

a1	0	1	b1/b2*(1-a2)
0	a2	b2/b1*(1-a1)	1

Поскольку в точке P1: x(n)=0; y(n)=0 матрица диагональная, получим, что в окрестности этой точки система ведёт себя как прямая сумма двух последовательностей:

x(n)=a1*x(n-1)=x(0)*(a1)^n;

y(n)=a2*y(n-1)=y(0)*(a2)^n;

Поэтому, если a1 и a2 больше единицы, численность растёт в геометрической прогрессии, а если между нулём и единицей, убывает.

Кроме того, имеется два симметричных случая, когда по одной переменной имеется рост, а по другой убывание, такие случаи называются гиперболическими. Если мы рассмотрим круг с начальными данными рядом с гиперболическим стационарным решением и будем следить за его итерациями, то образ этого круга будет в одном направлении растягиваться, в другом сплющиваться, изгибаться и поворачиваться, что может привести в конечном итоге к сложно устроенному притягивающему множеству.

Чтобы понять, как происходит растяжение или сжатие вблизи точки P2, надо найти собственные числа матрица J(P2):

$L1=1+(1+(1-a1)*(1-a2))^{0.5}$;

$L2=1-(1+(1-a1)*(1-a2))^{0.5}$.

После чего окажется, что на характер линейной части системы вблизи точек P1 и P2 влияют только параметры a1 и a2, а отношение b1/b2 влияет на то, как всё «закручивается» между этими решениями. Как правило сложные притягивающие множества возможны там, где имеется гиперболическая структура, в которой сжатие «сильнее» растяжения. Для точки P2 это значит, что $0<\det(J(p2))<1$. Подобные рассуждения позволяют локализовать значения параметров, при которых система имеет сложное поведение.

Возможности для социологии

Динамика взаимодействия социальных групп изучается, за небольшим исключением (например, [Турчин, 2007] или [Капица 1999]), с помощью наблюдений без привлечения математических методов. Считается, что если в биологии имеется возможность моделировать сложную динамику, то в социологии - нет.

Однако в настоящее время физики практикуют следующий подход к описанию сложного процесса, динамика которого может быть изучена только экспериментально: предположим, что в результате экспериментальных наблюдений у наблюдаемой системы имеется притягивающее множество, очень похожее на притягивающее множество известной системы, устроенной сравнительно просто. Тогда динамику изучаемой системы можно свести к динамике этой «простой» системы.

При этом от выбора «простой» системы зависит, насколько хорошо она моделирует процесс [Отт, 1993].

В динамических системах, которые строятся на основе наблюдений и изучаются во многом экспериментально, небольшие изменения начальных данных, параметров системы и функций, задающих саму динамическую систему, могут приводить к качественно новым результатам. Поэтому имеет смысл изучать только такие классы систем, в которых малые изменения параметров и функций не влияют на качественное поведение системы. В результате изучаются сравнительно простые нелинейные системы, про которые можно многое сказать, а потом рассматриваются сложные системы, которые к этим простым сводятся. С помощью таких методов можно не только упростить сами функции, но и понизить размерность системы и отсеять несущественные переменные [Отт, 1993, с. 145].

В итоге можно сделать следующие выводы: во-первых, социологам стоит обратить внимание на дискретные модели, поскольку они в большей степени соответствуют поведению людей (события отстоят друг от друга во времени). Во-вторых, многолетние наблюдения динамики можно изучать с помощью известных систем с «похожей» динамикой. И, конечно, не кто не отменял классические способы моделирования.

Библиографический список

Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний, М. 1959 с. 395-464.

Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2000. 368 с.

Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование, М.: Наука, 1976. 288 с.

Капица С.П. Общая теория роста человечества: Сколько людей жило, живёт и будет жить на Земле, М. Наука, 1999. 134 с.

Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем, М. Факториал, 1999. 768 с.

Леонов Г. А. Формулы ляпуновской размерности аттракторов Хенона и Лоренца,// Алгебра и анализ, 2001, т. 13, в. 3, с. 155-170.

Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров, М.: Мир, 1990, 312 с.

Турчин П.В. Историческая динамика, М. УРСС, 2007. 368 с.

Ott E. Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, Cambridge 1993. 393 с.